

Теорема Турана

19 июля

1. Докажите, что в графе на n вершинах без треугольников не более чем $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ рёбер.

Опр. Через $ex(n, H)$ обозначим максимальное количество рёбер в графе на n вершинах, не содержащем подграфа, изоморфного H .

Опр. Пусть $n = q(m-1) + r$, где r — остаток от деления n на $m-1$. Обозначим через $T_{n,m}$ полный $(m-1)$ -дольный граф на n вершинах с r долями размера $q+1$ и $m-1-r$ долями размера q .

Теорема Турана. Если граф G на n вершинах не содержит полного подграфа на m вершинах и имеет $ex(n, K_m)$ рёбер, то G изоморфен $T_{n,m}$.

2. (а) Убедитесь, что в $T_{n,m}$ нет подграфа, изоморфного K_m .

(б) Посчитайте количество рёбер в графе $T_{n,m}$.

(в) Докажите, что среди всех $(m-1)$ -дольных графов на n вершинах граф $T_{n,m}$ имеет максимальное количество рёбер.

(г) Докажите, что если граф G на n вершинах не содержит полного подграфа на m вершинах и имеет $ex(n, K_m)$ рёбер, то G содержит полный подграф на $m-1$ вершине.

(д) Докажите теорему Турана.

3. Есть $2n+1$ батареек ($n > 2$). Известно, что хороших среди них на одну больше, чем плохих, но какие именно батарейки хорошие, а какие плохие, неизвестно. В фонарик вставляются две батарейки, при этом он светит, только если обе — хорошие. За какое наименьшее число попыток можно гарантированно добиться, чтобы фонарик светил?

4. В графе на $2n$ вершинах n^2+1 ребро. Докажите, что в нём есть n треугольников.

5. Каждое ребро некоторого графа на 300 вершинах покрашено в красный или синий цвет так, что нет ни одного одноцветного треугольника. Какое наибольшее количество рёбер может быть в таком графе?

6. В графе G 19998 вершин. Известно, что в любом индуцированном подграфе на 9999 вершинах найдётся хотя бы 9999 рёбер. Какое наименьшее количество рёбер может быть в графе G ?

7. Докажите, что $ex(n, K_{2,2}) \leq \frac{n(1+\sqrt{4n-3})}{4}$.

Опр. Дистанционным графом на плоскости называется граф, вершины которого — это некоторые точки плоскости, а ребро проводится, если расстояние между точками равно 1.

8. (а) Для какого минимального m можно утверждать, что в дистанционном графе нет подграфа, изоморфного K_m ?

(б) Теорема Турана для дистанционных графов на плоскости. В дистанционном графе G на плоскости $4n$ вершин. Известно, что в G нет антиклики на $n + 1$ вершине. Докажите, что $e(G) \geq 7n$.